

Chapitre 10

DUALITE

Vêtir ceux qui sont nus
d'habits de femme et d'habits d'homme

La théorie étend sa portée en vêtant
les valeurs de vérité booliennes respectives 0 et 1 ,
ou valeurs de vérité immédiates
d'habits de nullité et d'habits d'unité,
ou valeurs de vérité médiates.

Les couleurs booliennes bleu rouge
sont des valeurs de vérité médiates
respectueuses de l'égalité des sexes.

L'accueil des propositions,
habits d'unité quand elles sont vraies
et de nullité quand elles sont fausses,

Dualité

Les couleurs booliennes étant sur pied de parfaite égalité,
leur échange engendre de toute évidence
un automorphisme involutif de la théorie,
nommé dualité (de de MORGAN).

Les couleurs booliennes sont duales

Les couleurs booliennes ont été adoptées
pour leur vertu supposée de laisser le lecteur
aussi indifférent
que l'Ane de Buridan entre ses picotins.

Il n'en va pas de même quand la réalité physique commande
comme valeurs de vérité médiates
des potentiels de niveaux différents.

Et, dans le contexte du calcul propositionnel,
comment rester indifférent entre le mensonge et la vérité ?
En aucune manière sur pied d'égalité morale
le vrai et le faux n'en restent pas moins duaux.

La dualité acquiert sa pleine portée,
quand
par leur connotation
l'échange des valeurs médiates ne laisse pas indifférent.

De manière plus précise,
 l'échange des couleurs booliennes
 dans l'énoncé d'une proposition ou la définition d'un concept,
 fait passer à la proposition duale ou au concept dual.

L'échange évoqué doit être total,
 et atteindre les bleu et les rouge celés par certains expressions
 ... ce qui revient à remplacer celles-ci par leurs duales.

Comme, hors souci de délais, disjonction OU et conjonction ET
 se définissent en bref

OU = OR :	_____	rouge		rouge
	sortie	ssi	une entrée au moins est	
ET = AND :		bleue		bleue

disjonction et conjonction
 forment le plus célèbre couple de duales mutuelles.

Comme l'exclusion NI = NOR de C.S. Peirce
 et l'incompatibilité NAND de Sheffer

se définissent de même

NOR :		bleue		rouge
	sortie	ssi	une entrée au moins est	
NAND:		rouge		bleue

Exclusion et Incompatibilité se trouvent duales mutuelles.

La dualité n'altère pas les graphes.
 Sommets duaux ont même nombre de flèches d'entrée
 et même nombre de flèches de sortie.

Suite à la parfaite dualité de la théorie,
toute proposition est vraie ou fausse
en même temps que sa duale.

Ainsi le théorème de C.S. Peirce
tout graphe boolien se monte à l'aide exclusive d'exclusions
se dualise-t-il en
le théorème de Sheffer
tout graphe boolien se monte à l'aide exclusive d'incompatibilités.

Introduite par de Morgan,
très soucieux d'éducation et de pédagogie
comme un authentique traitement de listes de mots,
la dualité se prête au dessin.

Une fonction boolienne B habitant un sommet,
et quelques NON
permettent de présenter graphiquement

le quatuor de B

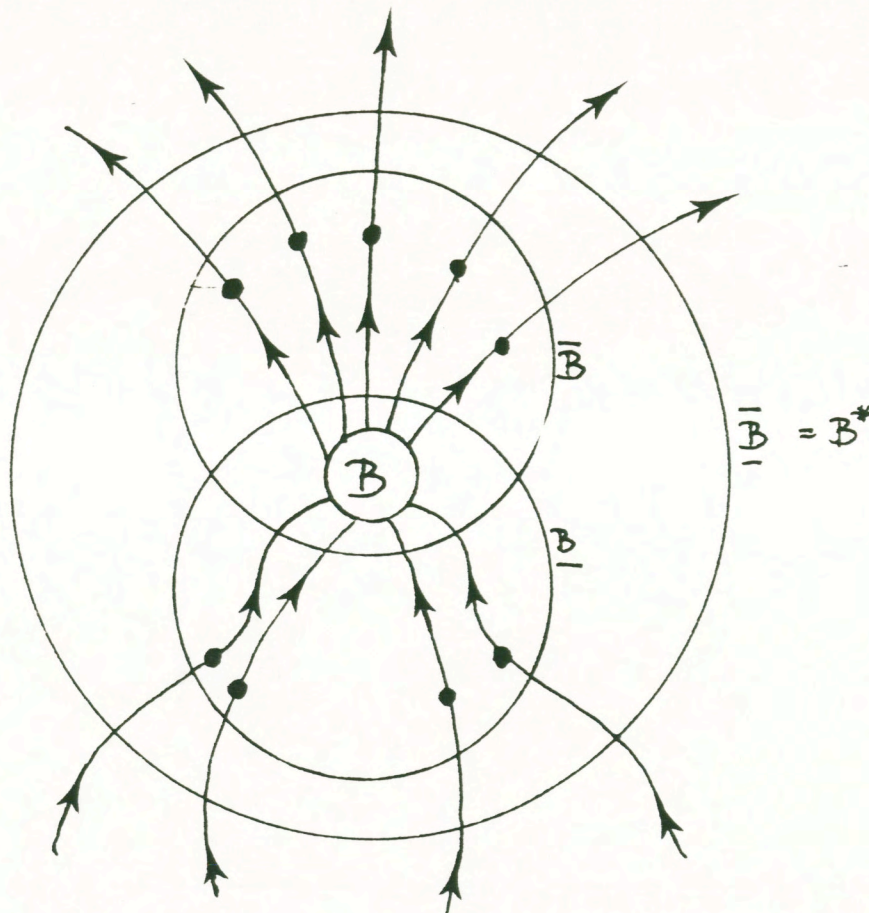
formé de

la fonction B

sa niée \bar{B}

sa préniée \underline{B}

sa duale $B^* = \underline{\bar{B}}$



Niée de sa préniée et préniée de sa niée,
 la duale d'une boolienne
 est la transformée de cette boolienne par la négation
 agissant tant à l'entrée qu'à la sortie de cette boolienne.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & & & & & \vdots \\
 \vdots & & = & & * & * & \vdots \\
 \vdots & B & = & B & = & B & = & B & \vdots \\
 \vdots & & & & = & & & & \vdots \\
 \vdots & & & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

Les constantes booliennes sont

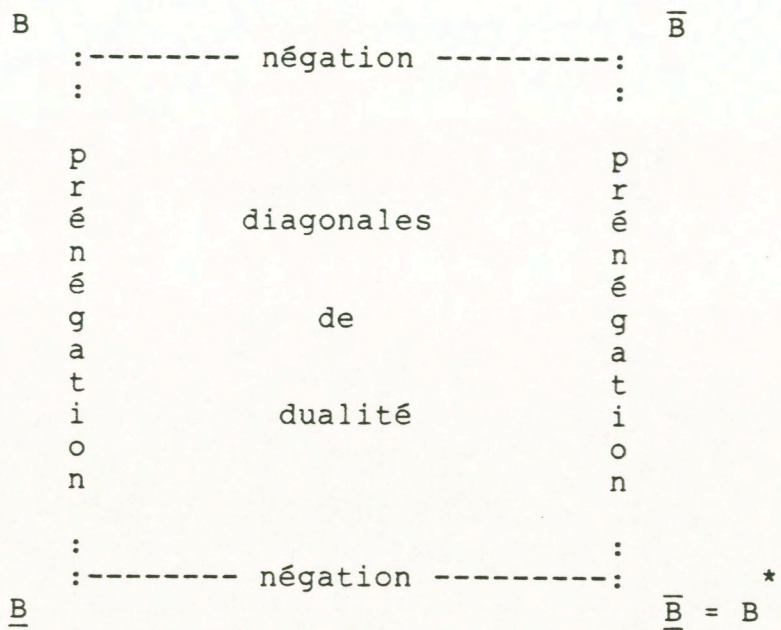
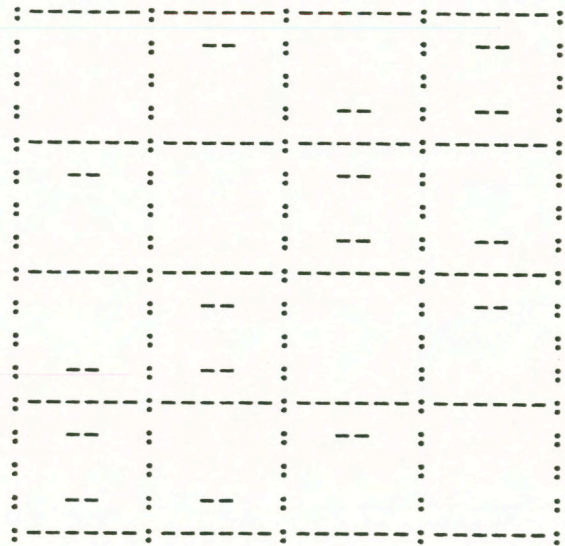
duales mutuelles	I^*	=	o	o^*	=	I
niées mutuelles	\bar{I}	=	o	\bar{o}	=	I
et autopréniées	\underline{I}	=	I	\underline{o}	=	o

Identité Négation Prénégation Dualité^{*}
 $B : \text{---} \rightarrow B$ $B : \text{---} \rightarrow \bar{B}$ $B : \text{---} \rightarrow \underline{B}$ $B : \text{---} \rightarrow B$

sobrement notées



forment le Vierergruppe compositionnel



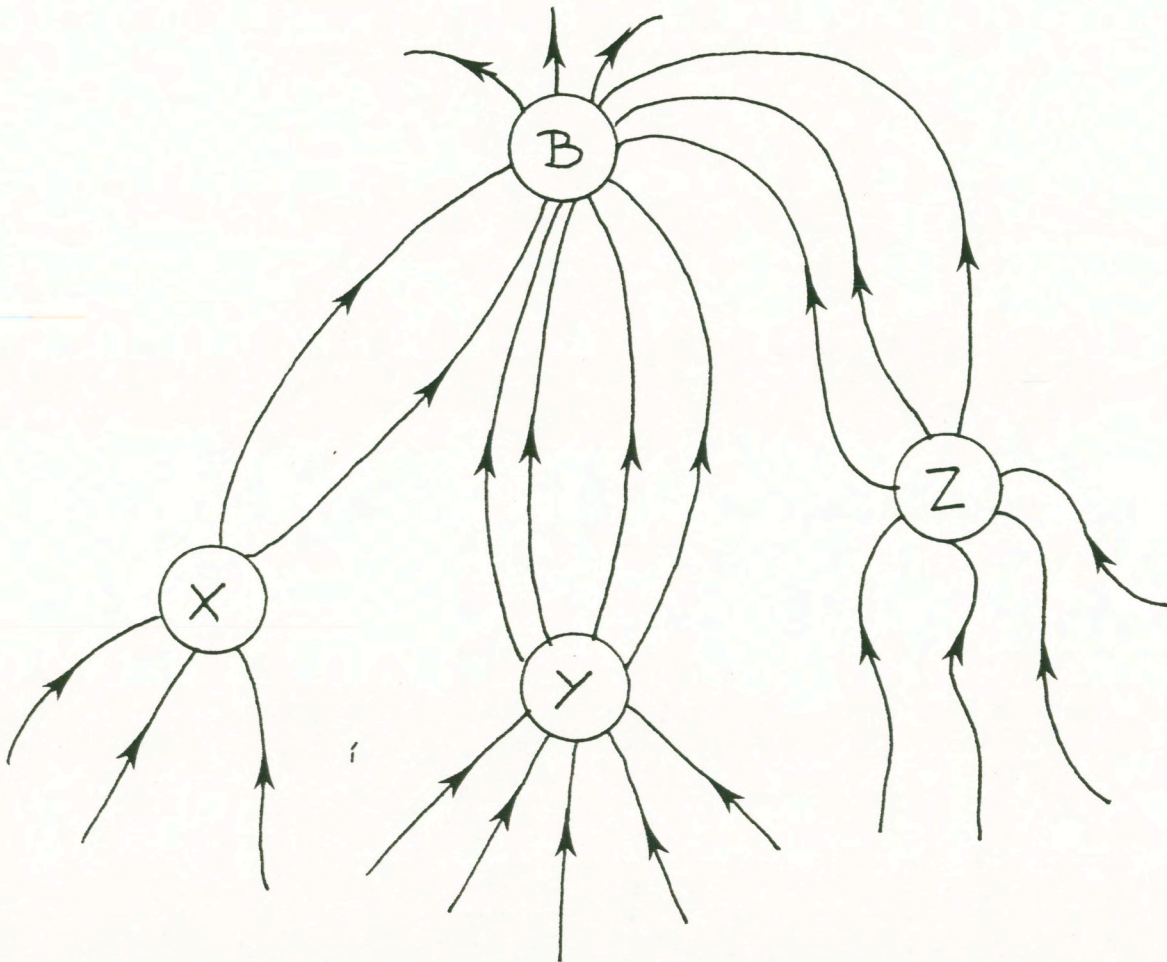
Aucune boolienne n'égale sa niée

Autoduale = égale à sa duale = à niée et préniée égales
 Autopréniée = égale à sa préniée = à niée et duale égales

$$B = B^* \quad \langle ===== \rangle \quad \bar{B} = \underline{B}$$

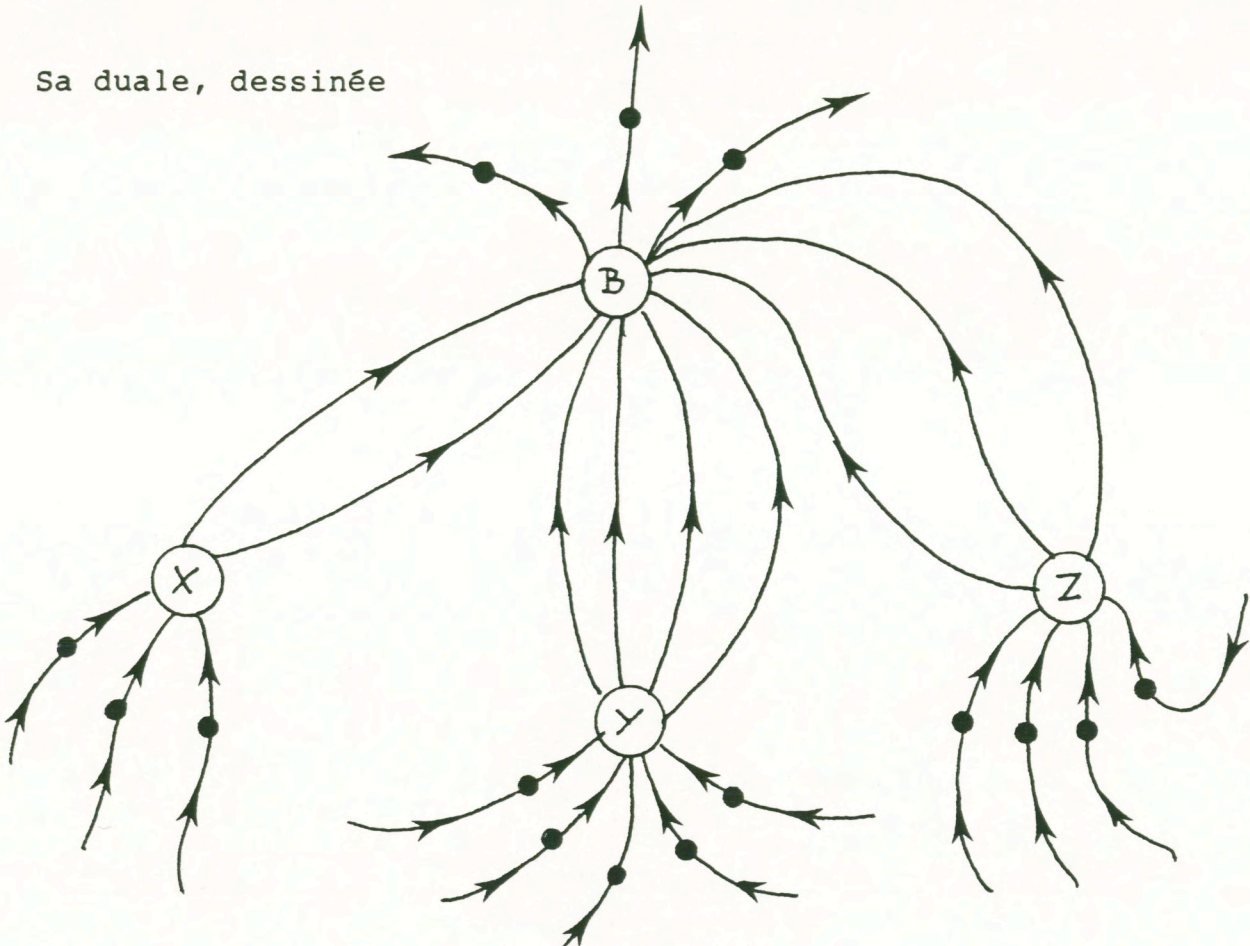
$$B = \underline{B} \quad \langle ===== \rangle \quad \bar{B} = B^*$$

La boolienne composée $B(XYZ)$, encore notée $(B \ XYZ)$ se définit

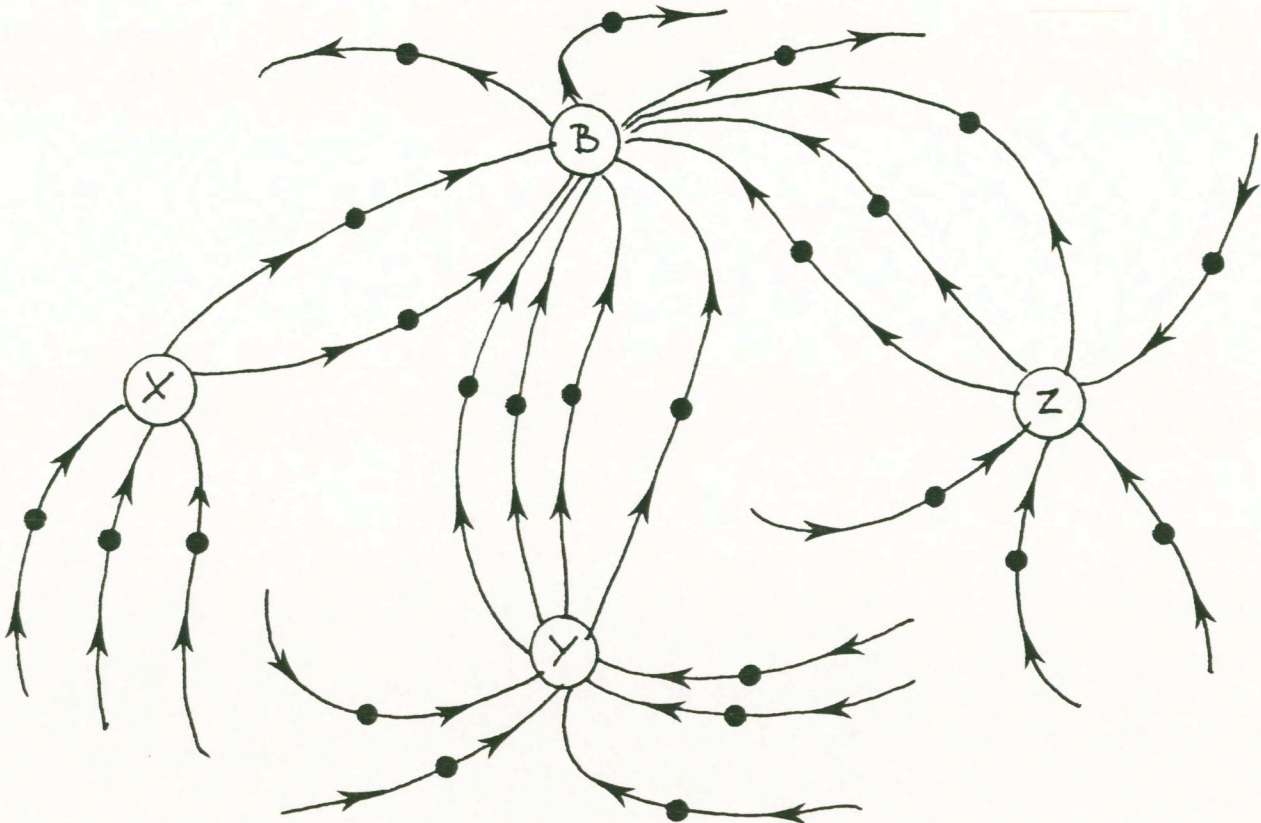


(Composée à douze flèches d'entrée et trois de sortie)

Sa duale, dessinée



se redessine



prouvant le théorème d'isomorphie de de Morgan :

: Théorème 10 ----- de Morgan :
 :
 : La dualité respecte la composition :
 :
 :
 : (B X Y Z) * = (B X Y Z) * * * * :
 :
 : ou encore :
 :
 : (B (X Y Z)) * = B (X Y Z) * * * * :
 : ----- :

Les variables d'entrée de la composée notées t u v w
 la dernière formule s'explique

$$(B (X Y Z)) (t u v w) * = B (X Y Z) (t u v w) * * * *$$

Comme la duale est la transformée par la négation, suit

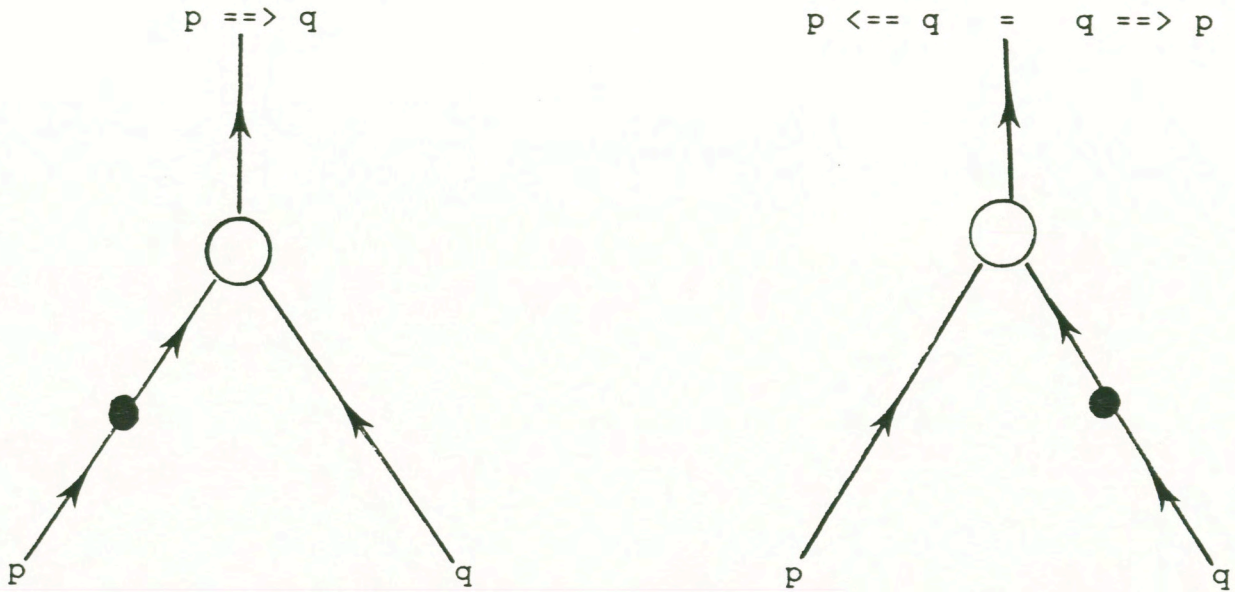
$$\overline{B (X Y Z) (\bar{t} \bar{u} \bar{v} \bar{w})} = B (X Y Z) (t u v w) * * * *$$

ce qui équivaut finalement à

$$\overline{B (X Y Z) (t u v w)} = B (X Y Z) (\bar{t} \bar{u} \bar{v} \bar{w}) * * * *$$

l'une des formes préférées de la dualité de de Morgan.

L'implication \implies et sa retournée \impliedby
 se définissent



Les valeurs prises par ces fonctions à deux variables
 sont exprimées en notation infixe, le signe entre les variables.

----- Théorème 11 -----

L'implication est la préniée de sa retournée

$$p \implies q = \bar{p} \impliedby \bar{q} = \bar{q} \implies \bar{p}$$

----- Théorème de la contraposition -----

Des seize fonctions de vérité à deux variables,

huit dansent, pour vous, ces deux quadrilles

OR	---	négation	---	NOR	==>	---	négation	---	=/=>
p				p					p
r				r					r
é		diagonales		é			diagonales		é
n				n					n
é				é					é
g		de		g			de		g
a				a					a
t				t					t
i		dualité		i			dualité		i
o				o					o
n				n					n
NAND	---	négation	---	AND	<==	---	négation	---	<=/=

Quant aux huit autres :

Les deux constantes 0 et 1 sont
 niées mutuelles autopréniées duales mutuelles

Les projections $pq :---> p$ et $pq :---> q$
 et leurs niées ou préniées $pq :---> \bar{p}$ et $pq :---> \bar{q}$
 sont autoduales.

L'addition de vérité $p + q$ et sa niée ou duale $1 + p + q$
 sont autopréniées.

La négation d'un mot binaire échange ses zéros et ses uns :

$$\overline{1100\ 0110\ 0011\ 1110\ 1010} = 0011\ 1001\ 1100\ 0001\ 0101$$

Les mots binaires à n bits sont les éléments

du naturel Neumannien 2^n

La négation retourne l'ordre naturel de 2^n

Les fonctions de vérité à n variables s'autocodent trivialement

en mots binaires à 2^n bits

L'autocode de la niée d'une fonction de vérité est le nié de l'autocode de cette fonction de vérité.

L'autocode de la préniée d'une fonction de vérité s'obtient en retournant l'autocode de cette fonction de vérité.

abcdxyzt --- négation --- -----
 abcdxyzt

p r é n é g a t i o n	diagonales de dualité	p r é n é g a t i o n
---	-------------------------------------	---

tzyxdcba --- négation --- -----
 tzyxdcba